PROCESSI STOCASTICI E CALCOLO DI MALLIAVIN

Seminario di Analisi su Spazi Gaussiani

SAMUELE BISCARO

08 Gennaio 2025

1 MISURE GAUSSIANE SU SPAZI DI HILBERT

1.1 Misure su spazi di Hilbert

Questo capitolo è dedicato al concetto di misura in uno spazio di Hilbert separabile H.

Utilizzeremo le seguenti notazioni:

- $\mathbb{N}$ denota l'insieme di tutti i numeri naturali: $1, 2, \ldots$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto interno e $|\cdot|$ la norma in H.
- $L(H)$ è l'algebra di Banach degli operatori lineari limitati $T : H \to H$ dotata della norma
$$\|T\| = \sup_{x \in H,\, |x|=1} |Tx|.$$
Un operatore lineare $T \in L(H)$ si dice *simmetrico* se $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ per ogni $x, y \in H$, e *positivo* se $\langle Tx, x \rangle \geqslant 0$ per ogni $x \in H$. Denoteremo con $L^+(H)$ l'insieme di tutti gli operatori simmetrici e positivi in $L(H)$.
- $\mathcal{B}(H)$ è la σ-algebra di tutti i boreliani di H.
- $\mathcal{P}(H)$ è l'insieme di tutte le misure di probabilità boreliane su $(H, \mathcal{B}(H))$.

1.2 Momenti, media e covarianza

Definizione 1.1. Sia $k \in \mathbb{N}$, diciamo che $\mu \in \mathcal{P}(H)$ ha momento k-esimo finito se
$$\int_H |x|^k \mu(dx) < +\infty.$$

Se μ ha momento primo finito allora $F : H \to \mathbb{R}$ definito come

$$F(x) = \int_H \langle x, y \rangle \ \mu(dy)$$

è continuo, per il teorema di rappresentazione di Riesz allora esiste un unico $m \in H$ tale che

$$\langle m|x\rangle = \int_H \langle x, y\rangle \; \mu(dy), \tag{1.1}$$

m si dice la *media* di μ.

Allo stesso modo, se il momento secondo di μ è finito, $\mu \in \mathcal{P}^2(H)$, (e quindi, in particolare, anche il primo) allora è continua la forma bilineare $G : H \times H \to \mathbb{R}$ data da

$$G(x, y) = \int_H \langle x, z - m\rangle\langle y, z - m\rangle \; \mu(dz),$$

sempre per Riesz, esiste allora un unico $Q \in L(H)$, detto *covarianza* di μ, tale che

$$\langle Qx, y\rangle = \int_H \langle x, z - m\rangle\langle y, z - m\rangle \; \mu(dz).$$

Valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 1.2. Sia $\mu \in \mathcal{P}^2(H)$ con media m e covarianza Q, allora:

i. Q è simmetrica e positiva.

ii. Per ogni base ortonormale $\{e_k\}$ in H si ha

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle Qe_k, e_k\rangle = \int_H |x - m|^2 \; \mu(dx) < +\infty.$$

iii. Q è compatto.

Osservazione 1.3. Dato che Q è simmetrica e compatta esiste una base ortonormale completa $\{e_k\}$ tale che

$$Qe_k = \lambda_k e_k.$$

Definizione 1.4. Sia $\mu \in \mathcal{P}(H)$, la sua *trasformata di Fourier* è definita da:

$$\hat{\mu}(h) = \int_H e^{i\langle h, x\rangle} \; \mu(dx) \quad \forall h \in H.$$

1.3 Misure gaussiane su spazi di Hilbert

Definizione 1.5. Una misura di probabilità μ su $(H, B(H))$ si dice *gaussiana* se esistono $m \in H$ e $Q \in L_1^+(H)$ tali che

$$\hat{\mu}(h) = e^{i\langle m, h\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle Qh, h\rangle}, \quad \forall h \in H.$$

In questo caso, scriveremo $\mu = \mathcal{N}_{m,Q}$ e, se $m = 0$, $\mu = \mathcal{N}_Q$. Se $\mathrm{Ker}(Q) = \{0\}$, diremo che μ è *non degenere*.

Per ogni coppia (m, Q) con $m \in H$ e $Q \in L_1^+(H)$, esiste una unica misura gaussiana $\mathcal{N}_{m,Q}$. Inoltre, tutti i momenti di μ sono finiti, m è la media e Q è la covarianza di μ.

D'ora in poi assumeremo sempre di avere misure gaussiane non degeneri. Possiamo usare l'Osservazione 1.3 e trovare una base ortonormale $\{e_k\}$ di H tale che

$$Qe_k = \lambda_k e_k,$$

da cui segue in particolare che Q^{-1} è non limitato. Usando il teorema della mappa aperta si ha $Q(H) \neq H$, tuttavia $Q(H)$ è denso dal momento che $x_0 \in Q(H)^{\perp}$ se e solo se

$$\langle Qx, x_0\rangle = \langle x, Qx_0\rangle = 0 \quad \forall x \in H,$$

ovvero se e solo se $Qx_0 = 0$ e quindi se e solo se $x_0 = 0$.

Possiamo anche considerare $Q^{\frac{1}{2}}$, chiaramente vale che

$$Q^{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_k}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

1.4 La funzione rumore bianco

Consideriamo la seguente mappa W

$$W : Q^{\frac{1}{2}}(H) \subseteq H \to L^2(H, \mu) : z \mapsto W_z,$$

con $W_z(x) = \langle x, Q^{-\frac{1}{2}}z\rangle$ per ogni $x \in H$. W è un'immersione isometrica di $Q^{\frac{1}{2}}(H)$ in $L^2(H, \mu)$, infatti, dati $z_1, z_2 \in H$, vale

$$\int_H W_{z_1}(x) W_{z_2}(x)\ \mu(dx) = \langle QQ^{-\frac{1}{2}}z_1, Q^{-\frac{1}{2}}z_2\rangle = \langle z_1, z_2\rangle.$$

In particolare W è quindi continua e si può estendere con Hahn-Banach in modo unico a tutto H. Dato $f \in H$ è ben definita W_f, e si chiama funzione rumore bianco di f.

Proposizione 1.6. Sia $z \in H$, allora W_z è una variabile aleatoria Gaussiana centrata con covarianza $|z|^2$.

Esempio 1.7. Sia $H = L^2([0, 1])$, allora $\left(W_{\mathbb{1}_{[0,t]}}\right)_{t\in[0,1]}$ è un moto browniano.

Proposizione 1.8. Sia B il moto browniano definito nell'Esempio 1.7, allora per $f \in L^2([0, 1])$ vale

$$W_f = \int_0^1 f_s\, dB_s. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Sia $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ una partizione di $[0, 1]$ e

$$f_\sigma := \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\ \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}.$$

Allora

$$W_{f_\sigma} = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\ \left(W_{\mathbb{1}_{[0,t_k]}} - W_{\mathbb{1}_{[0,t_{k-1}]}}\right).$$

Dato che W è una mappa continua per $|\sigma| \to 0$ si ottiene l'identità (1.2).

□

2 LA DERIVATA DI MALLIAVIN

Definizione 2.1. Definiamo il sottospazio delle *funzioni esponenziali*, indicato con $\mathcal{E}(H) \subseteq L^2(H, \mu)$, come lo span lineare di tutte le parti reali di funzioni della forma:

$$\varepsilon_h(x) = e^{i\langle x,h\rangle}, \quad x \in H, \quad h \in H.$$

Consideriamo l'operatore lineare

$$M : \mathcal{E}(H) \subseteq L^2(H, \mu) \to L^2(H, \mu; H) : \varphi \to Q^{\frac{1}{2}} D\varphi.$$

Mostreremo che questo operatore M è chiudibile, e chiameremo il dominio della sua chiusura (indicata ancora con M) lo spazio di *Malliavin-Sobolev* $D^{1,2}(H, \mu)$.

2.1 Approssimazione per funzioni esponenziali

Proposizione 2.2. Per ogni $\varphi \in C_b(H)$ esiste una sequenza a due indici $(\varphi_{n,k}) \subseteq \mathcal{E}(H)$ tale che:

i. $\|\varphi_{n,k}\|_0 \leqslant \|\varphi\|_0, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$,

ii. $\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \varphi_{n,k}(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in H$.

Dimostrazione. Fissato $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\varphi_n(x) = \varphi(P_n x)$ per ogni valore $x \in H$. Possiamo identificare $H_n := P_n(H)$ con $\mathbb{R}^n$. Consideriamo ora una sequenza $(\psi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_b(H_n)$ con le seguenti proprietà:

i. $\psi_{n,k}$ è periodica con periodo n in tutte le sue coordinate.

ii. $\psi_{n,k}(x) = \varphi_n(x)$ per ogni $x \in \left[-n + \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}\right]^n$.

iii. $\|\psi_{n,k}\|_0 \leqslant \|\varphi_n\|_0 \leqslant \|\varphi\|_0$.

È chiaro che $\lim_{k\to\infty} \psi_{n,k}(x) = \varphi_n(x)$ per ogni $x \in H$. Inoltre, utilizzando le serie di Fourier, possiamo trovare una sequenza $(\varphi_{n,k})$ in $\mathcal{E}(H)$ ("vicina" a $(\psi_{n,k})$) che soddisfa:

i. $\|\varphi_{n,k}\|_0 \leqslant \|\varphi\|_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$,

ii. $\lim_{k\to\infty} \varphi_{n,k}(x) = \varphi_n(x), \quad \forall x \in H$.

A questo punto è evidente che la sequenza a due indici $(\varphi_{n,k})$ soddisfa le condizioni richieste.

$\square$

Corollario 2.2.1. $\mathcal{E}(H)$ è denso in $L^2(H, \mu)$.

2.2 Lo spazio di Malliavin-Sobolev

Introduciamo anche l'operatore $M_k\varphi(x) = \langle M\varphi(x), e_k\rangle = \sqrt{\lambda_k} D_k\varphi(x)$.

Ci servirà la seguente formula di "integrazione per parti"

Lemma 2.3. Per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(H)$ e $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente identità:

$$\int_H D_k\varphi\ \psi\ d\mu = -\int_H \varphi\ D_k\psi\ d\mu + \frac{1}{\lambda_k}\int_H x_k\varphi\psi\ d\mu. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare (2.1) per $\varphi = \varepsilon_f$ e $\psi = \varepsilon_g$, con $f, g \in H$. In questo caso, per $k \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\int_H D_k\varphi\psi\ d\mu = if_k\int_H \varepsilon_{f+g}\ d\mu = if_k e^{-\frac{1}{2}\langle Q(f+g), f+g\rangle}, \tag{2.2}$$

$$\int_H \varphi D_k\psi\ d\mu = ig_k\int_H \varepsilon_{f+g}\ d\mu = ig_k e^{-\frac{1}{2}\langle Q(f+g), f+g\rangle}. \tag{2.3}$$

Infine abbiamo

$$\begin{aligned}\int_H x_k\varphi\psi\ d\mu &= \int_H x_k\varepsilon_{f+g}(x)\mu(dx)\\ &= -i\ \frac{d}{dt}\int_H \varepsilon_{f+g+te_k}(x)\ \mu(dx)\Big|_{t=0}\\ &= -i\ \frac{d}{dt}e^{-\frac{1}{2}\langle Q(f+g+te_k), f+g+te_k\rangle}\Big|_{t=0}\\ &= i\langle Q(f+g), e_k\rangle e^{-\frac{1}{2}\langle Q(f+g), f+g\rangle}\\ &= i\lambda_k(f_k+g_k)e^{-\frac{1}{2}\langle Q(f+g), f+g\rangle}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Sommando (2.2), (2.3) e (2.4) otteniamo (2.1).

□

Lemma 2.4. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(H)$ e $z \in H$. Allora vale la seguente identità:

$$\int_H \langle M\varphi, z\rangle\psi\ d\mu = -\int_H \langle M\psi, z\rangle\varphi\ d\mu + \int_H W_z\varphi\psi\ d\mu. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Mostriamo il lemma per $z \in Q^{\frac{1}{2}}(H)$, allora

$$\int_H \langle M\varphi, z\rangle\psi\ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{1/2}z_k\int_H D_k\varphi\ \psi\ d\mu. \tag{2.6}$$

Usando il Lemma 2.3 si ha allora

$$\int_H \langle M\varphi, z\rangle\psi\ d\mu = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{1/2}z_k\int_H D_k\psi\ \varphi\ d\mu + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1/2}z_k\int_H x_k\ \varphi\psi\ d\mu,$$

da cui segue immediatamente (2.5), per densità si ottiene allora la formula per ogni $z \in H$.

□

Grazie a questi lemmi è facile mostrare

Proposizione 2.5. La mappa

$$M : \mathcal{E}(H) \subseteq L^2(H, \mu) \to L^2(H, \mu; H) : \varphi \to Q^{\frac{1}{2}}D\varphi$$

è chiudibile.

Indicheremo sempre con M la chiusura di questa mappa, e con $D^{1,2}(H,\mu)$ il suo dominio. È facile verificare che $D^{1,2}(H,\mu)$, dotato del prodotto scalare:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{D^{1,2}(H,\mu)} = \int_H \varphi\psi \, d\mu + \int_H \langle M\varphi, M\psi \rangle \, d\mu,$$

è uno spazio di Hilbert. La norma associata è data da:

$$\|\varphi\|^2_{D^{1,2}(H,\mu)} = \int_H \varphi^2 \, d\mu + \int_H |M\varphi|^2 \, d\mu.$$

Per ogni $\varphi \in D^{1,2}(H,\mu)$, chiamiamo $M\varphi$ la *derivata di Malliavin* di φ.

Proposizione 2.6. Sia $\varphi : H \to \mathbb{R}$ continua e differenziabile e tale che esistano $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $K > 0$ per cui

$$|\varphi(x)| + |D\varphi(x)| \leqslant K\left(1 + |x|^{2N}\right), \quad \forall x \in H.$$

Allora $\varphi \in D^{1,2}(H,\mu)$ e $M\varphi(x) = Q^{\frac{1}{2}} D\varphi(x)$ per μ quasi ogni $x \in H$.

Corollario 2.6.1. In particolare per $f \in H$ vale $W_f \in D^{1,2}(H,\mu)$ e $MW_f = f$.

Osservazione 2.7. Se B è il moto browniano dell'Esempio 1.7 vale

$$MB_t = \mathbb{1}_{[0,t]}.$$

2.3 Derivata di Malliavin e processi stocastici

Consideriamo ora il caso $H = L^2([0,1])$, allora se $\varphi \in D^{1,2}(H,\mu)$ si ha che $M\varphi \in L^2(H,\mu;H)$, quindi per μ quasi ogni $x \in H$, $(M\varphi)(x)$ è un elemento di $H = L^2([0,1])$, questo permette di definire

$$M_\tau\varphi(x) = [(M\varphi)(x)](\tau), \quad \tau \in [0,1].$$

Allora $M_\tau\varphi$ è un elemento di $L^2(H,\mu)$, ovvero una variabile aleatoria su H. Quindi la derivata di Malliavin di una variabile aleatoria è un processo stocastico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Giuseppe Da Prato. *Introduction to stochastic analysis and malliavin calculus*. Lecture Notes (Scuola Normale Superiore). Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy, 2 edition, February 2009.